ТЕМА №3*.* ***РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ.***

Дадим определение *последовательности*. Если каждому натуральному числу  поставлен в соответствие какой-то элемент  из некоторого множества *A*,то говорят, что задана последовательность элементов множества *A*:  Это могут быть последовательности чисел или элементов какого-то другого множества. Например, последовательность биномиальных коэффициентов  при фиксированном значении числа *n* - пример *конечной* последовательности целых положительных чисел. Если мы знаем, как определяется элемент последовательности  при каждом значении , то такое задание последовательности называется *явным*. Например, значение биномиальных коэффициентов вычисляется по формуле: .

Последовательность может быть описана *неявно*, *рекурсивно* – с помощью *рекуррентного соотношения*.

Последовательность  называется *рекуррентной порядка* *k* () , если существует формула , с помощью которой каждый последующий элемент последовательности  вычисляется через предыдущие элементы . Данная формула называется *рекуррентным соотношением порядка k* . Заметим, что *первые* *k* *элементов* последовательности должны быть заданы.

Например, последовательность чисел *Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,…*задается рекуррентным соотношением *2* порядка, данную числовую последовательность мы обозначили как :

 *(1)*

Последовательность *Фибоначчи* является частным случаем *линейных однородных рекуррентных**соотношений с постоянными коэффициентами порядка k*. В общем случае они имеют вид:

, , *(2)*

где  - постоянные коэффициенты,

– *k* начальных условий, (начальные значения последовательности ). *(2a)*

Существует общий метод решения (т.е. отыскания  как функции *n*) данных рекуррентных соотношений. Мы рассмотрим методику решения *линейных однородных рекуррентных**соотношений с постоянными коэффициентами порядка k* на примере задачи *Фибоначчи* – *(1)*.

Решение рекуррентного соотношения будем искать в виде:

.

Подставив это решение в рекуррентное соотношение *(1)*, получим:

.

Разделив обе части этого соотношения на , имеем:



Или:

.

Это уравнение называется *характеристическим* для данного рекуррентного соотношения. Решив квадратное уравнение, получим:

.

Общее решение нашего рекуррентного соотношения имеет вид:

, *(3)*

подставив в *(3)* корни характеристического уравнения, имеем:



Решение рекуррентного соотношения *k* –*го* порядка называется *общим*, если оно зависит от *k* произвольных постоянных  и путем подбора этих постоянных можно получить любое частное решение данного соотношения. Используем начальные условия для нахождения коэффициентов :



.

Решая систему, находим:

 .

 , 

Подставив полученные коэффициенты в *(3)*, получим решение рекуррентного соотношения *(1)*для последовательности чисел *Фибоначчи*.

,

формулу *Бине* для вычислений чисел *Фибоначчи*. Это выражение при всех натуральных значениях *n* принимает целые значения.

Рассмотрев ситуацию, когда характеристическое уравнение имело два различных действительных корня, перейдем к случаю кратных корней. В этом случае общее решение для рекуррентного соотношения *2-го* порядка будет иметь вид:

. *(4)*

Рассмотрим пример, решим рекуррентное соотношение:



Характеристическое уравнение имеет вид:

.

Решая его, получаем кратный корень .

Общее решение имеет вид:

.

Коэффициенты найдем, исходя из начальных условий:



Отсюда получаем , .

Решение имеет вид:

.

Рассмотренные примеры позволяют изложить общий прием решения *линейных однородных рекуррентных**соотношений порядка k с постоянными коэффициентами*. Рассмотрим рекуррентноесоотношение *(2)*.

Будем предполагать, что характеристическое уравнение имеет простые корни. Решение соотношения ищем в виде:.

Подставляя это выражение в *(2)* и разделив обе части на, получим полином *k* – степени:

.

Это уравнение имеет *k* корней: . Тогда общее решение соотношения имеет вид:

.

Неизвестные коэффициенты  находим, используя начальные условия *(2a)*, которые позволяют составить систему линейных алгебраических уравнений относительно этих коэффициентов.